Přijímací zkoušky na MFF UK, 2011

Test z matematiky (A)

V následujících úlohách označte všechny správné odpovědi. Některé úlohy mohou mít více správných odpovědí. Pouze za úlohy, kde budou označeny právě všechny správné odpovědi, budou přiděleny body. Každá úloha je ohodnocena 10 body a čas na vypracování testu je **75 minut**.

1. Nalezněte řešení rovnice $2x^2 + 3x - 2 = 0$ v oboru reálných čísel. Pak označte pravdivé výroky.

a) Všechna řešení jsou kladná.
b) Všechna řešení jsou záporná.
c) Všechna řešení jsou prvky intervalu $(-3, 1)$.
d) Rovnice má pouze racionální řešení.
e) Rovnice nemá řešení.

2. Nalezněte množinu M všech řešení nerovnice $e^{x^2-8x+7} \leq 1$ v oboru reálných čísel. Pak označte pravdivé výroky.

a) $M \subseteq \langle e, 8\rangle$
b) $M \cap (-\infty, 0) \neq \emptyset$
c) $\langle 3, 6\rangle \subseteq M$
d) $\langle 5, 9\rangle \subseteq M$
e) $M \subseteq \langle -1, \infty)$

3. Spočtěte vzdálenost d bodu $[1, 0]$ od přímky procházející body $[1, -1]$ a $[-2, 2]$. Pak označte pravdivé výroky.

a) $d \in \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right)$
b) $d \in (\frac{1}{2}, 2)$
c) $d = \frac{1}{\sqrt{2}}$
d) $d = \sqrt{2}$
e) $d = 2$

4. Výraz $\sqrt{a^2 + 4ab + 4b^2}$ je pro každá reálná čísla a, b roven

a) $\sqrt{(a + 2b)^2}$,
b) $a + 2b$,
c) $|a| + 2\,|b|$,
d) $|a + 2b|$,
e) $\big||a| + 2\,|b|\big|$.

5. V reálném oboru vyřešte nerovnici $\frac{x-1}{2x+16} > 1$. Množinu řešení označme M. Označte pravdivé výroky.

a) $M \subseteq \langle -20, 20\rangle$
b) $-8 \in M$
c) $M \cap \langle -13, 1\rangle \neq \emptyset$
d) $\langle -16, -15\rangle \subseteq M$
e) $M \cup \langle -9, 0\rangle = \langle -19, 0\rangle$

6. V reálném oboru vyřešte rovnici $3\cos^2 x = 3\cos x - \sin^2 x$. Označte pravdivé výroky.

a) Rovnice má v intervalu $(0, 2\pi)$ právě čtyři řešení.
b) Rovnice má v intervalu $(0, 1/2)$ právě jedno řešení.
c) Rovnice má v intervalu $(\pi, 2\pi)$ právě dvě řešení.
d) Existuje řešení x rovnice splňující $\cos x = 1$.
e) Existuje řešení x rovnice splňující $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$.

7. Řešte soustavu rovnic s reálným parametrem λ.

$$\lambda x + y = 1$$
$$x + \lambda y = 1$$

Označte pravdivé výroky.

a) Soustava má právě jedno řešení (x, y) právě tehdy, když $\lambda^2 \neq 1$.
b) Soustava má právě jedno řešení (x, y) pro libovolné λ.
c) Pro $\lambda = 2$ jsou všechna řešení obsažena ve čtverci $\langle 0, 1\rangle \times \langle 0, 1\rangle$.
d) Pro $\lambda = 1$ nemá soustava řešení.
e) Pro $\lambda = -1$ nemá soustava řešení.

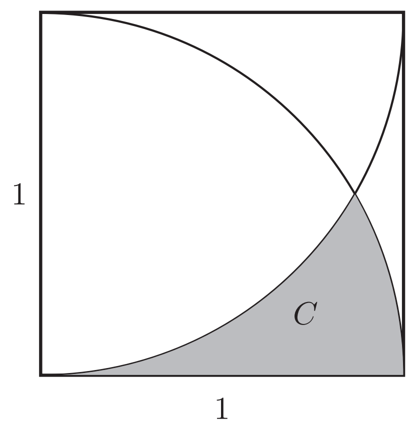
8. Načrtněte průběh funkce s absolutními hodnotami: $f(x) = \big||x+1| - 2\big|$. Nechť a je reálné číslo. Uvažujte rovnici $f(x) = a$. Označte pravdivé výroky.

a) Existuje $a \in \mathbb{R}$ takové, že rovnice má právě tři řešení.
b) Existuje $a \in \mathbb{R}$ takové, že rovnice má právě jedno řešení.
c) Pro každé $a \in \mathbb{R}$ se řešení rovnice nachází v intervalu $\langle -a, a\rangle$.
d) Řešení rovnice existuje pro každé $a \in \mathbb{R}$.
e) Funkce f je sudá.

9. Nalezněte všechny přímky, které jsou tečnami ke kružnici $\{[x, y] \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 = 1\}$ a zároveň ke kružnici $\{[x, y] \in \mathbb{R}^2;\ (x-4)^2 + y^2 = 1\}$. Označte pravdivé výroky.

a) Právě jedna přímka je řešením úlohy.
b) Úloha má více než dvě řešení.
c) Přímka určená rovnicí $y = \frac{1}{\sqrt{3}}(x-2)$ je řešením úlohy.
d) Přímka určená rovnicí $y = \frac{1}{2}(x-2)$ je řešením úlohy.
e) Přímka určená rovnicí $y = 1$ je řešením úlohy.

10. Ve čtverci o délce strany 1 uvažujte obrazec C, jehož hranice je tvořena jednou stranou čtverce a částmi kružnic se středy ve vrcholech čtverce a poloměru 1 (viz obrázek). Spočtěte obsah S obrazce C a označte pravdivé výroky.



a) $S = \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\pi}{8}$
b) $S = \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{12}$
c) $S = \frac{\sqrt{8}}{4} - \frac{\pi}{6}$
d) $S \leq \frac{1}{2}$
e) $S \leq 1 - \frac{\pi}{4}$